

**О методологии приобщения  
школьников к общим  
математическим понятиям**

*С.Р. Коголовский*



При всей существенности различий уровней учебной математической деятельности младших и старших школьников в классической работе Л.С. Выготского [2] усматриваются во многом общие черты процессов освоения научных понятий, несущих преобразование способов мышления, место и роль житейских понятий, прото-понятий в этих процессах.

«Развитие житейского понятия должно достигнуть известного уровня для того, чтобы <учащийся> мог усвоить научное понятие <и осознать> превосходство научного понятия над ним» [Там же, с. 263]. Восхождение на теоретический уровень и его освоение, «переход в новый и высший план мысли» нуждается в активной подпитке «низшими» его формами. Это положение, подтверждаемое и всей историей развития математики, помогает осознать пагубность одностороннего развития теоретического начала в обучении.

Строгое общее математическое понятие формируется и развивается как модель протопонятия, послужившего его истоком, а значит, и как определенная форма метода исследования представляемого им поля математической деятельности, и как средство системной организации знаний, относящихся к этому полю, и как носитель стратегии поисково-исследовательской деятельности. Уже в процессе его освоения оно становится методом своего «само»-исследования и средством своего «само»-обоснования как метода. Тем самым оно обретает и реализует потенцию развития, направленного на обретение формы, адекватной всем этим его

качествам и ролям, и полнокровной возможности продуктивных взаимодействий заложенных в нём прагматической направленности и направленности на работу «чистого сознания».

Однако определение такого понятия не представляет его как продукт многоступенных преобразований, «скрывая» историю его становления, а тем самым и «сущность». И потому при прямом приобщении учащихся к такому понятию оно «вырывается из его естественной связи, берётся в застывшем... виде вне связи с теми... процессами мышления, в которых оно... рождается и живёт... Прямое обучение понятиям... оказывается фактически невозможным и педагогически бесплодным» [Там же, с. 189].

«Все высшие психические функции... являются опосредованными процессами, т.е. включают в свою структуру как центральную и основную часть всего процесса в целом употребление знака» [Там же, с. 132] как средства подчинения психических операций своей власти и направления их деятельности на решение поставленной задачи. Использование знаков ведёт к перестройке натуральных процессов, к превращению их в опосредованные. Знаковые операции превращаются во внутренние психологические системы. Знаковая форма представления строгого математического понятия превращается в процессе его освоения в программу настройки на деятельность в поле, представимом этим понятием. Способность к мобильному развёртыванию делает

эту программу эффективным инструментом аналитической деятельности. Её «свёрнутость», «свёрнутость» знаковых операций делают эту программу эффективным механизмом ориентировки и метаориентировки, а тем самым и эффективным механизмом осознания.

Научное понятие «не живёт изолированной жизнью и... не представляет собой застывшего... образования». Оно «всегда встречается в живом... процессе мышления, всегда выполняет ту или иную функцию сообщения, осмысливания, понимания, решения какой-нибудь задачи» [Там же, с. 121]. И для того, чтобы оно в полной мере представало в этом качестве, необходимы проявления его полифункциональности. Чем более широким является многообразие рассматриваемых задач, решение которых использует осваиваемое понятие, чем шире становится многообразие его горизонтальных и вертикальных связей, тем глубже оно осваивается. Нарращиваемое многообразие связей приводит к формированию системы связанных с ним задач, научных понятий, процедур, приёмов, методов. И «только в системе [понятие] может приобрести осознанность и произвольность» [Там же, с. 221].

«Сила научных понятий обнаруживается в той сфере, которая... определяется высшими свойствами понятий – осознанностью и произвольностью; как раз в этой сфере обнаруживают свою слабость житейские понятия... сильные в сфере спонтанного, ситуационно-осмысленного... применения, в сфере опыта и эмпиризма. Развитие спонтанных понятий начинается в сфере... эмпирии и движется в направлении к... осознанности и произвольности. Развитие научных понятий начинается в сфере осознанности и произвольности и продолжается далее, прорастая вниз в сферу личного опыта и конкретности» [Там же, с. 263]. А потенция «само»-развития, заложенная в научных понятиях, реализуется так, что прорастание «вниз в сферу личного опыта и конкретности» сопро-

вождается прорастанием «вверх», подготавливающим прорывы на новые уровни деятельности.

С подходом к обучению, следующим процитированным положением из [2], едва ли совместима установка на опрощение курса математики, якобы приводящее к большей его доступности. Доступность математики как учебного предмета достигается не обеднением, низводящим её к абстрактности, а обогащением многообразием связей, т.е. восхождением к большей конкретности. С таким подходом едва ли совместима всё ещё бытующая установка, выражаемая тезисом «математика – это логика», следование которой препятствует реализации развивающего потенциала математики, в том числе логическому развитию учащихся.

Поскольку «осознание приходит через ворота научных понятий» [Там же, с. 220], то освоение учащимися строгих общих математических понятий должно быть центральной задачей обучения математике в средней школе. Эта задача состоит прежде всего в разработке способов перехода «от натуральной формы мышления к культурной», от житейских понятий, или протопонятий, к строгим понятиям, влекущего преобразование учебной деятельности.

Переход от житейского понятия к научному «понимается Л.С. Выготским как преодоление натуральной формы [мышления]. Это не постепенный, эволюционный процесс, а сдвиг и скачок, в котором натуральная и культурная (реальная и идеальная) формы вступают в конфликты и коллизии» [7, с. 11]. В результате научное понятие предстаёт как противостоящее житейскому, культурная (идеальная) форма – как противостоящая натуральной (реальной). Это переход, осуществляемый прямым введением научного понятия. Но разве при таком переходе научное понятие не вырывается из его естественной связи уже тем, что оно привносится? Разве не затрудняется вследствие этого освоение «нового и высшего плана мысли» и не блокируется развитие

способностей к освоению новых знаний? И разве не будет служить препятствием усвоению научного понятия высокий уровень логической сложности его определения или то, что оно является продуктом многоступенчатых абстрагирований? Таковы понятие функции, начальные (строгие) понятия математического анализа. Таковы и «простейшие» геометрические понятия, содержание и способы функционирования которых являются продуктами преобразования наивных геометрических рассмотрений при восхождении к рассмотрениям на аксиоматическом уровне.

Начала анализа несут в себе качественно новые возможности для развития математической и общей интеллектуальной культуры учащихся. Но эти возможности не реализуются. Обучение началам анализа основывается на размытых, не развиваемых интуитивных представлениях о предельном переходе и непрерывности. Строгое понятие предела оказывается недоступным большинству школьников. Причины этого видят в логической сложности его определения и в том, что оно выражает «процессную» ситуацию на «статическом» языке. Предлагающиеся варианты построения начал анализа без использования понятия предела, по сути, представляют собой варианты решения узкообразовательных задач за счёт развивающих целей. Какими бы ни были достоинства этих вариантов, они едва ли сопоставимы с огромным развивающим потенциалом процессов развития и преобразования таких первообразов, первоидей, лежащих в основаниях математической мысли: непрерывности, как идеи непрерывности и предельного перехода, в строгие понятия, эффективно работающие и обретающие далеко идущее развитие в процессах их реализации.

Нет прямой связи между формальной и содержательной сложностями. Высокий уровень логической сложности определения понятия предела не является препятствием для его освоения, ибо естественный путь освоения этого понятия – это вос-

хождение к нему от интуитивных представлений о предельном переходе как к продуктивной модели этих представлений.

Целесообразность отказа от рассмотрения в школьном курсе математики строгого понятия предела видят и в том, что оно имеет «неоправданно большой» объём и смещает акцент в сторону внимания к «патологическим случаям». Но всякое общее понятие (об объёме которого имеет смысл говорить) имеет «неоправданно большой» объём, а потому и «патологические случаи». А так как оно и возникает, и осваивается как метод, как носитель ориентировки и метаориентировки, как выразитель стратегии поисково-исследовательской деятельности, то его «неоправданно большой» объём и «патологические случаи» не являются препятствием для его освоения.

Итак, охарактеризованный путь к освоению строгого понятия предела, не просто снимающий названные трудности, но преобразующий их в эффективное средство развивающего обучения, – это путь обогащения «истории» осваиваемого научного понятия его «предысторией» как процессом усвоения протопонятия и его развития, ведущего к строгому понятию, к несомому им преобразению протопонятия, способа мышления, учебной деятельности.

Способность к освоению и рождению новых знаний не может формироваться и развиваться без развития ориентировки и механизмов понимания, осуществляемого посредством развития многонаправленной поисково-исследовательской деятельности. В такой деятельности мышление проявляет себя как комплексная динамическая система [6], в которой управление внутренними процессами и взаимодействием с окружением осуществляется по гетерархическому принципу [1]. Существенная часть законов реагирования, функционирования и развития такой системы не может быть установлена в принципе [6]. Поэтому управление поисково-исследовательской деятельностью уча-

щихся возможно только как иницирующее, направляющее и корректирующее влияние. Оно возможно как способствование их самообучению, осуществляемое раскрепощением субъективности учащихся, её развитием посредством разнообразия целеполаганий и полей поисковой деятельности, наращивания многомерности, многоуровневости и вариативности такой деятельности, наталкивания на поучительные ошибки, активизации интерсубъективности с помощью учебных диалогов.

**Начальной стадией** такого процесса должно быть созидание «предыстории» формируемого понятия как первичного опыта мыследеятельности в заданном направлении, как этапа в развитии субъективности учащегося, т.е. деятельности на наивном уровне, основанной на обращении к нечётким, синкретичным представлениям, к основанному на них протопонятию. Урезание такого начала, его низведение до уровня предварительных разъяснений несёт трудновосполнимые потери в деле математического и общего интеллектуального развития учащихся.

Представления, протопонятие, явившиеся истоком сформированного строгого понятия, взаимодействуя с ним, задавая начальные направления его развития, развиваются и сами и тем способствуют развитию ориентировки, а значит, и развитию поисково-исследовательской деятельности. И это является дополнительным подтверждением значимости «наивной» стадии формирования строгого общего понятия.

Итак, освоение строгих общих понятий становится эффективным при осуществлении процессов их формирования, процессов восхождения к ним. Происходящее в этих процессах развитие учащихся как субъектов учебной деятельности делает такие процессы ведущим средством развивающего обучения математике.

«Процесс образования понятий носит всегда продуктивный, а не репродуктивный характер... Понятие возникает и образуется в процес-

се... направленном на решение какой-либо задачи» [2, с. 122]. Поиск решения такой задачи должен приводить к осознанию ограниченности возможностей протопонятия, а значит, к осознанию необходимости преодоления этой ограниченности. **Вторую стадию** процесса формирования строгого математического понятия следует направить на обращение к такой задаче, которая направляет учащихся к столкновению с пограничной ситуацией, приводящему к осознанию ограниченности возможностей протопонятия, а значит, к осознанию необходимости преодоления этой ограниченности.

**Третья стадия** состоит в «уточнении» протопонятия «экстрагированием» его рационального содержания, приводящим к формированию определения строгого понятия как четкой рациональной формы, как выражения «сущности», стоящей за протопонятием.

В действительности полученное определение не является продуктом чистого анализа – оно является творческим продуктом, одной из многих возможных продуктивных моделей протопонятия. Этой модели предстоит поменяться ролями с протопонятием, «онтологизироваться» и тем самым преобразить учебную деятельность. Процесс такого преобразования, осуществляемый с помощью формально-логических средств, представляет **четвёртую стадию** процесса формирования строгого понятия.

Применение к полученному определению способа мышления, «настраиваемого» формальной логикой, «очищает» представляемое им понятие от всего неявного, превращает его в понятие иной природы, в понятие трансцендентального характера по отношению к освоенному до этого пространству значений и смыслов, и в рамках нового, необозримо более широкого пространства происходит переосмысление преобразённого понятия, несущего в себе качественно новые возможности. Использование формально-логических средств порождает метаморфозу продукта уточ-

нения в продукт творческого акта. Та чёткая рациональная форма, которая явилась продуктом «очищения», та знаковая форма, в которую она облеклась, подготовила прорыв в идеальный мир, в мир «сущностей», в котором субъективность, прошедшая «очищение», становится развитой субъектностью. (Описанный процесс формирования строгого математического понятия подобен работе феноменологической редукции в смысле Э. Гуссерля.)

**Завершающий этап четвёртой стадии** состоит в первичном испытании сформированного понятия на работоспособность и одновременно в первичном его освоении; в первичном усмотрении качественно новых возможностей, которые оно несёт; в осознании того, что данное понятие является продуктивной моделью протопонятия. Это этап первичного освоения построенного (и далее достраиваемого) идеального мира и его взаимоотношений с «реальным» миром, этап первичного освоения взаимных переводов с языка задач, процедур, ценностей одного мира на язык задач, процедур, ценностей другого. (При этом направляющая роль остается принадлежащей «реальному» миру.)

Важно принять во внимание и то, что строгие общие математические понятия являются продуктами многократных, многоступенчатых преобразований и представляют окультуренные формы «первомеханизмов» математической деятельности. Отсюда их продуктивность и необычайная широта применений.

Направленность учебной математической деятельности на неуклонное движение к «чистому сознанию» приводит к её вырождению. Такая деятельность перестаёт способствовать развитию учащихся как субъектов учебной деятельности, их превращению в архитекторов собственного интеллекта. Здесь уместно напомнить мысль И. Канта: восприятия без понятий слепы, понятия без восприятий пусты.

Процессы описанного вида представляют природосообразный

инструмент построения строгих понятий как продуктивных моделей протопонятий, как «выразителей» их «сущностей», как идеальных форм. Выступая как превращённые формы протопонятий, эти модели рожают преобразования математической деятельности. Такие процессы являются эффективным инструментом математической деятельности, внутренне связанным с реальными процессами мышления, в которых эти понятия рождаются и живут.

Таким образом, исследования Л.С. Выготского [2] высвечивают пути формирования эффективной и природосообразной методики восхождения к строгим математическим понятиям, а в конечном счёте – эффективной и природосообразной методики развивающего обучения математике.

Однако весьма существенно то, что четырёхстадийные процессы снимают конфликты между протопонятием и научным понятием, между натуральной и культурной формами посредством осуществления перехода «натуральное – культурное» не как втискивания мыследеятельности учащихся в «правильные» формы, а как направляемого «само»-развития наличествующих форм мыследеятельности, ведущего к рождению новых, культурных их форм, представляемых сформированными строгими понятиями, носителями идеального (ср. [7]). Тем самым становятся существенно иными отношения между реальной и идеальной формами и сам характер идеального, поскольку сформированное понятие не становится противостоящим протопонятию, послужившему его истоком, а формируется и работает как его идеальная форма. Идеальное в таких процессах предстает не как предсуществующее, а как формируемый процессом развития реального один из многих возможных вариантов идеального (ср. [7]). Процессы освоения строгих общих понятий становятся при этом процессами движения от неразвитого идеального к развиваемому и преобразуемому идеальному.

Итак, логика раскрытых Л.С. Выготским природосообразных процессов, ведущих от протопонятий к строгим математическим понятиям, сохраняя свои существенные черты, качественно преобразуется за счёт иного характера перехода «натуральное–культурное». Процессы описанного вида, посредством которых такой переход осуществляется, используют и обогащают живой опыт математической деятельности. В них проявляется креативный характер математики и как области научной деятельности, и как учебного предмета.

Переход, осуществляемый посредством таких процессов, является не просто природосообразным, но необходимым средством воплощения «мета»-логики раскрытых Л.С. Выготским процессов как логики процессов, ведущих к преобразению способов мышления, к «новым и высшим планам мысли», к высшим уровням осознания и произвольности.

### Литература

1. *Величковский, Б.М.* Современная когнитивная психология / Б.М. Величковский. – М., 1982.
2. *Выготский, Л.С.* Мышление и речь / Л.С. Выготский // Собр. соч. ; т. 2. – М., 1982.
3. *Давыдов, В.В.* Теория развивающего обучения / В.В. Давыдов. – М., 1996.
4. *Коголовский, С.Р.* Развивающее обучение математике как преобразующее обучение / С.Р. Коголовский. – Иваново : Изд-во «Иваново», 2010.
5. *Коголовский, С.Р.* О развивающем обучении математике / С.Р. Коголовский, Е.А. Шмелёва, О.В. Герасимова // Путь к понятию (от интуитивных представлений – к строгому понятию). – Иваново, 1998.
6. *Поддьяков, А.Н.* Исследовательское поведение : стратегии познания, помощь, противодействие, конфликт / А.Н. Поддьяков. – М., 2000.
7. *Эльконин, Б.Д.* Введение в психологию развития / Б.Д. Эльконин. – М., 2001.

*Сергей Рувимович Коголовский – профессор, зав. кафедрой начального математического образования Шуйского государственного педагогического университета, г. Шуя, Ивановская обл.*